Бисимуляционные игры в эпистемической логике

Николаева Валерия

Международная Лаборатория Логики, Лингвистики и Формальной Философии, НИУ ВШЭ

Эпистемическая логика, оператор K_i

Эпистемическая логика формально исследует знание. Язык задается так

$\varphi ::= p \mid \neg\varphi \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid K_i\varphi \quad i \in G$ (группв агентов)

$K_i\varphi$ – агент $i \in G$ знает, что φ

1. Рома знает, что Маша опаздает $K_r\varphi$
2. Маша знает, что Рома знает, что она опаздает $K_m K_r\varphi$

Аксиоматизация логики $S5$

Логика $S5$ задается следующими аксиомами и правилами вывода

Все тавтологии классической логики высказываний

$(K) \quad K_i(\varphi \to \psi) \to (K_i\varphi \to K_i\psi)$ $\qquad (MP) \quad \frac{\varphi\to\psi,\varphi}{\psi}$

$(T) \quad K_i\varphi \to \varphi$ $\qquad (G_K) \quad \frac{\vdash\varphi}{\vdash K_i\varphi}$

$(4) \quad K_i\varphi \to K_iK_i\varphi$

$(B) \quad \varphi \to K_i\neg K_i\neg\varphi$ $\qquad (5) \quad \neg K_i\varphi \to K_i\neg K_i\varphi$ вместо (4) и (B)

Общее знание

Вася вошел в класс и сказал, что преподаватель опаздает. Тогда у группы студентов есть общее знание о том, что преподаватель опаздает.

$E_G\varphi ::= \bigwedge_{i\in G} K_i\varphi$ распространенное знание: все знают, что φ

$E_G^j\varphi ::= \underbrace{E_G ... E_G}_{j}\varphi$ все знают, что все знают...что все знают, что φ

$C_G\varphi ::= \bigwedge_{j=0}^{\infty} E_G^j\varphi$ только для инфинитарных языков

К аксиомам $S5$ добавляются еще три и правило Гёделя для C_G

$(fix) \quad C_G\varphi \to E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$

$(ind) \quad C_G(\varphi \to E_G\varphi) \to (\varphi \to C_G\varphi)$

$(K_C) \quad C_G(\varphi \to \psi) \to (C_G\varphi \to C_G\psi)$

$(G_C) \quad \frac{\vdash\varphi}{\vdash C_G\varphi}$

Как альтернативный вариант, к аксиомам $S5$ добавляется аксиома (fix) и правило индукции (ind_R)

$(fix) \quad C_G\varphi \to E_G(\varphi \wedge C_G\varphi)$

$(ind_R) \quad \vdash \varphi \to E_G(\psi \wedge \varphi) \implies \vdash (\varphi \to C_G\varphi)$

Общее знание на моделях Крипке

Мир y $G-$достижим из мира x, если он достижим участниками группы агентов G

$M, x \vDash C_G\varphi \iff \quad M, y \models \varphi$ для любого y, $\quad G-$достижимого из мира x

Модальная глубина

Модальная глубина формулы $d(\varphi)$ - это максимальная вложенность модальных операторов. Она определяется по индукции.

$d(p) = 0$

$d(K_ip) = 1 + d(p)$

$d(\varphi \wedge \psi) = max\{d(\varphi), d(\psi)\}$

Семантика

Модель Крипке $M = (W, R_i, V)$ задается множеством миров W, отношением xR_iy и оценкой переменных V. Истинность в модели:

$M, x \vDash p \iff p \in M$ $\quad$ В мире x модели M истинна p

$M, x \vDash \neg\varphi \iff M, x \nvDash \varphi$

$M, x \vDash \varphi \wedge \psi \iff (M, x \vDash \varphi$ и $M, x \vDash \psi)$

$M, x \vDash \varphi \vee \psi \iff (M, x \vDash \varphi$ или $M, x \vDash \psi)$

$M, x \vDash \varphi \to \psi \iff (M, x \vDash \varphi \Rightarrow M, x \vDash \psi)$

отношение xR_iy в логике $S5$ рефлексивно, симметрично и транзитивно

Выразимость

Чем больше свойств модели выразимы логическим языком, тем более выразимый этот язык.

Язык L_2 не менее выразм, чем L_1 $\quad (L_1 \preceq L_2) \iff \forall\varphi_1 \in L_1 \quad \exists\varphi_2 \in L_2 : \varphi_1 \equiv \varphi_2$

Языки L_1 и L_2 одинаково выразимы $(L_1 \equiv L_2) \iff L_1 \preceq L_2 \quad$ и $\quad L_2 \preceq L_1$

Бисимуляции

Понятие бисимуляции возникло в области теоретической компьютерной науки, и перешло в модальную логику в работах Ван Бентема. С помощью бисимуляционных игр можно переформулировать проблему неотличимости структур в терминах выигрышной стратегии одного из игроков.

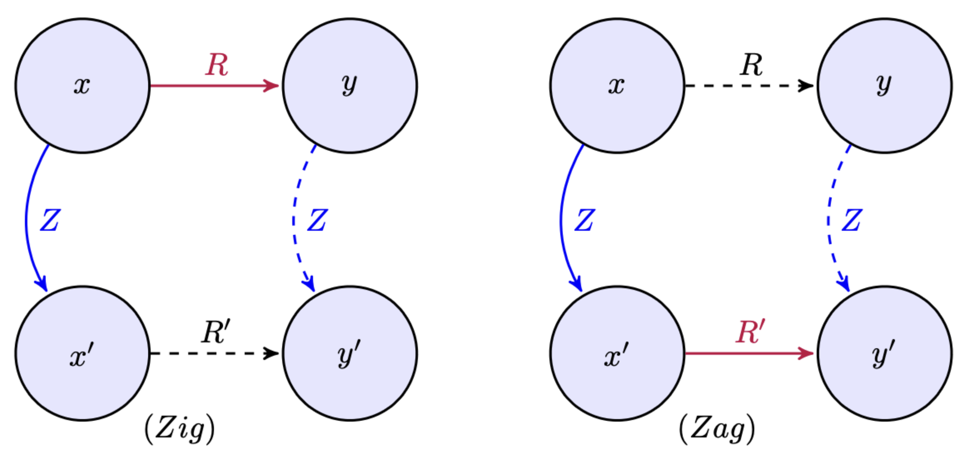
Формальное определение

Бисимуляция это непустое бинарное отношение Z⊆(W ×W') между моделями M=(W,R,V) и M'=(W',R',V') такое, что выполняются условия

$(var)\ xZx' \implies \forall p(M, x \models p \Leftrightarrow M', x' \models p)$

$(zig)\ xZx' \wedge xRy \implies \exists y' \in W'(yZy' \wedge x'Ry')$

$(zag)\ xZx' \wedge x'Ry' \implies \exists y \in W(yZy' \wedge xRy)$



Игровая переформулировка

У многих определений в эпистемической логике есть игровые переформулировки, которые удобнее при доказательствах. Играют два игрока – Абеляр и Элоиза. Когда один из игроков выигрывает, второй проигрывает, поэтому при логических доказательствах прибегают к таким играм, в которых один из игроков имеет выигрышную стратегию, достижимую за n (конечное) или бесконечное число шагов. Предполагается, что игроки ведут себя рационально.

Бисимуляционная игра

1. В начале игры $Game_n((M,x)(M',x'))$ Абеляр выбирает мир $x \in W$ или $x' \in W'$ и делает ход в выбранной модели
2. Элоиза в делает ход в противоположной модели
3. Каждый ход в мирах проверяется оценка переменных $\forall p \in V(M, y \models p \Leftrightarrow M', y' \models p)$
4. Если кто-то из игроков не может сделать ход, он проигрывает, а если игра продлилась n раундов, Элоиза выигрывает

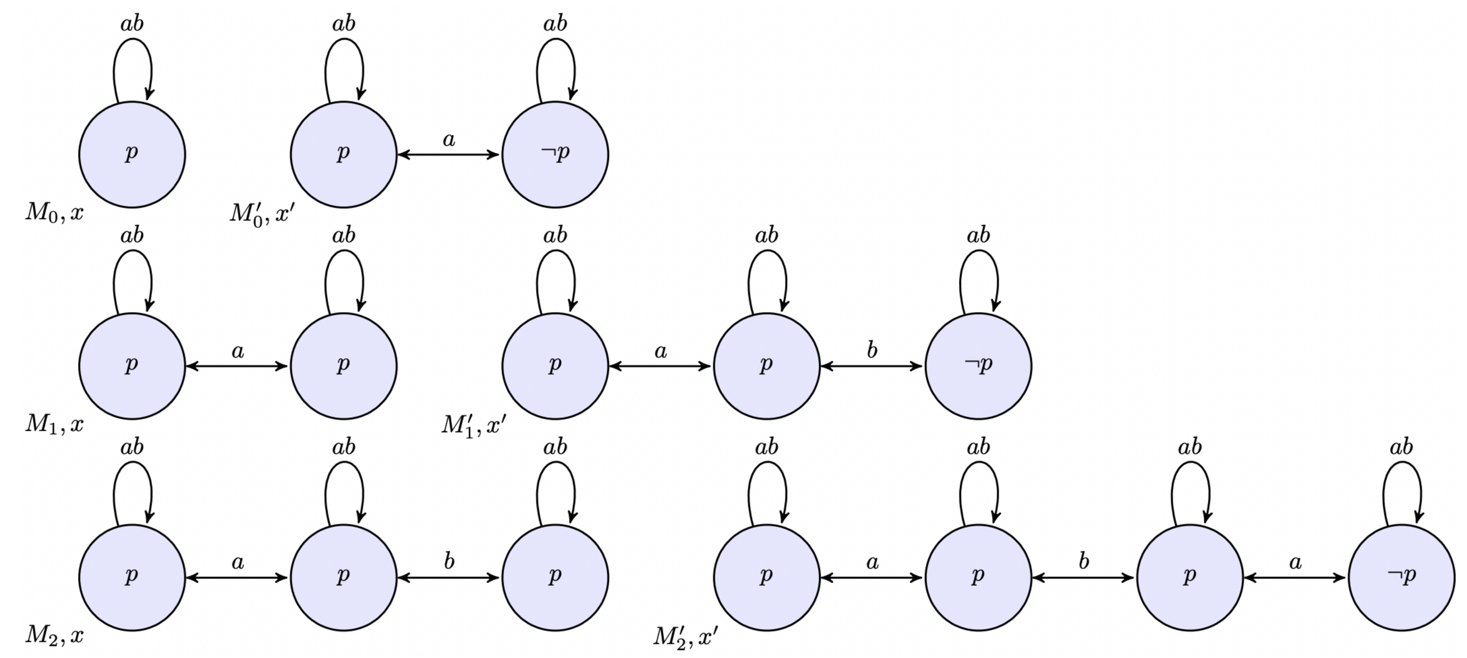
Игровая $n-$эквивалентность $(M, x) \leftrightarrows_n (M', x')$, если в игре $Game_n((M,x)(M',x'))$ Элоиза имеет выигрышную стратегию.

Доказательство невыразимости оператора C_{ab}

Игровая $n-$эквивалентность эквивалентна модальной эквивалентности для формул глубины n

$(M, x) \leftrightarrows_n (M', x') \iff (M, x) \equiv_n (M', x')$

1	$\varphi^* \equiv C_{ab}p$	$\rhd \perp$
2	$\mathrm{d}(\varphi^*) = n$	
3	$\mathrm{M}_n, x \models C_{ab}p$	
4	$\mathrm{M'}_n, x \nvDash C_{ab}p$	
5	$(\mathrm{M}_n, x) \equiv_n (M'_n, x)$	
6	$\mathrm{M}_n, x \models \varphi^*$	$3, 1$
7	$\mathrm{M'}_n, x \models \varphi^*$	$2, 5, 6$
8	$\mathrm{M'}_n, x \models C_{ab}p$	$7, 1$



References

Benthem - 2012 // Logic in games

Ditmarsch, Hoek, Kooi - 2008 // Dynamic Epistemic Logic

Fagin, Halpern, Moses, Vardi - 1996 // Reasoning about Knowledge

valerya.nikolaev@gmail.com